(3) لتكن الحلقة البوليانية $P(E)$ حيث E فضاء طوبولوجي، من أجل أي عنصر $x \in E$ فإن $\mathcal{V}(x)$ أسرة الجوارات للنقطة x تكون مرشحة في $P(E)$ وهذا نستنتج مباشرة من تعريف الجوار.

من المعروف أن x تكون نقطة منعزلة إذا كانت $\{x\}$ جوارة للنقطة x كي تكون $\mathcal{V}(x)$ فوق مرشحة يلزم ويكفي أن تكون x نقطة منعزلة وذلك لأنه:

- إذا كانت x منعزلة فإذا كان $A \notin \mathcal{V}$ فإن $x \notin A$ لأنه لو كان $x \in A$ و x منعزلة أي أن $\{x\}$ جوار للنقطة x و $x \in \{x\} \subseteq A$ وهذا يعني أن A جوار لـ x وهذا خلاف الفرض

⇐ $x \in A$ و $x \in \{x\} \subseteq C_A$ أي أن C_A جوار للنقطة x أي أن $C_A \in \mathcal{V}(x)$

حسب المبرهنة السابقة (صح) فوق مرشحة

العكس:

لنفرض أن $\mathcal{V}(x)$ فوق مرشحة ولنفرض جدلاً أن x ليست نقطة منعزلة أي أن $\{x\}$

$\{x\} \notin \mathcal{V}(x)$ ⇐ حسب مبرهنة سابقة $C_{\{x\}} \in \mathcal{V}(x)$ وهذا يتناقض مع الفرض الجدلي فالفرض خاطئ أي أن x نقطة منعزلة

«المورفيزمات والمثاليات والمرشحات»

لتكن A, B حلقتين بوليانيتين و f مورفيزم بولياني من A في B

مبرهنة:

① إذا كانت F مرشحة في B فإن $f^{-1}(F)$ تكون مرشحة في A

② إذا كانت I مثالية في B فإن $f^{-1}(F)$ تكون مثالية في A

البرهان:

① نفرض أن F مرشحة في B فإن $f(1) = 1 \in F$ ⇐ $1 \in f^{-1}(F)$.

• نفرض أن $x \in f^{-1}(F)$ و $y \geq x$ ⇐ $f(x) \in F$ و $f(y) \geq f(x)$ (لأن f مورفيزم بولياني متزايد) ولكن F مرشحة في B ⇐ $f(y) \in F$ ⇐ $y \in f^{-1}(F)$

• نفرض $x \in f^{-1}(F)$ و $y \in f^{-1}(F)$ ⇐ $f(x) \in F$ و $f(y) \in F$ ولكن F مرشحة ⇐ $f(x)\,f(y) \in F$ ⇐ $f(xy) \in F$ ⇐ $xy \in f^{-1}(F)$ مباشرة

$f^{-1}(F)$ تكون مرشحة في A

② نفرض أن I مثالية في B فإن

• $f(0)=0 \in I \Rightarrow 0 \in f^{-1}(I)$ لأنه بولياني وتشاكل

• نفرض أن $x \in f^{-1}(I)$ و $y \le x \Rightarrow f(x) \in I$ و $f(y) \le f(x)$ ولكن I مثالية في B $\Rightarrow f(y) \in I \Rightarrow y \in f^{-1}(I)$

• نفرض أن $x \in f^{-1}(I)$ و $y \in f^{-1}(I) \Rightarrow f(x) \in I$ و $f(y) \in I$ و I مثالية في B $\Rightarrow f(x) \vee f(y) \in I \Rightarrow f(x \vee y) \in I \Rightarrow x \vee y \in f^{-1}(I)$ ومنه ينتج أن $f^{-1}(I)$ مثالية في A

ملاحظات من البرهنة

① $f^{-1}(1)$ تكون مرشحة في A

② $f^{-1}(0)$ تكون مثالية في A

③ إذا كانت F مرشحة فعلية في B فإن $f^{-1}(F)$ تكون أيضاً مرشحة فعلية (نتيجة مشابهة للمثالية) وذلك لأنه إذا كانت F مرشحة فعلية في B فإن $0 \notin F \Rightarrow 0 = f^{-1}(0) \notin f^{-1}(F)$

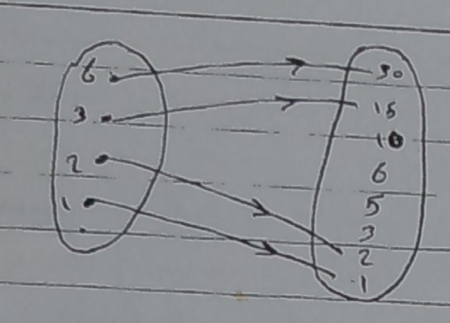
④ إذا كانت F فوق مرشحة في B فإن $f^{-1}(F)$ تكون فوق مرشحة في A (نتيجة مشابهة للمثالية) وذلك لأنه نفرض أن $x \notin f^{-1}(F) \Leftrightarrow f(x) \notin F \Rightarrow f(x') = (f(x))' \in F \Leftrightarrow x' \in f^{-1}(F) \Leftrightarrow$ ومنه $f^{-1}(F)$ فوق مرشحة

⑤ في الحالة العامة إن الصورة المباشرة لمرشحة (أو مثالية) في A ليست بالضرورة مرشحة (أو مثالية) في B

مثال:

ليكن f تطبيق من D(6) في D(30) معرف بالشكل التالي

$f(1)=1 \quad f(2)=2 \quad f(3)=15 \quad f(6)=30$



يمكن التحقق بسهولة أن f هو مورفيزم بولياني

أن الحلقة $\{2,6\}$ مرشحة في $D(6)$ لكن
$f(\{2,6\}) = \{2,30\}$
ليست مرشحة في $D(30)$

مبرهنة:
ليكن f : (مورفيزم تام) مورفيزم بولياني من A إلى B
وإذا كانت F مرشحة في A فإن $f(F)$ تكون مرشحة في B (النتيجة مشابهة بالنسبة للمثاليات)

البرهان:

. بما أن $1 \in F$ فإن $f(1) = 1 \in f(F)$

. نفرض أن $x \in f(F)$ و $y \geq x$ ⇐ يوجد $x_1 \in F$ بحيث يكون $x = f(x_1)$ و يوجد $y_1 \in A$ (الاغمار) بحيث يكون $y = f(y_1)$

(لأن f مورفيزم)

$y = y \vee x = f(y_1) \vee f(x_1) = f(x_1 \vee y_1) \in f(F)$

لأن:

$x_1 \leq x_1 \vee y_1 \Rightarrow x_1 \vee y_1 \in F \Rightarrow y \in f(F)$ دوماً (F مرشحة)

. ليكن $x \in f(F)$ و $y \in f(F)$ ⇐ يوجد $x_1, y_1 \in F$ بحيث يكون
$x = f(x_1)$ و $y = f(y_1) \Rightarrow xy = f(x_1)f(y_1) = f(x_1 y_1)$
(لأن $x_1, y_1 \in F$ و F مرشحة)
ومنه ينتج أن $f(F)$ مرشحة في B

بالنسبة للمثالية

. $0 \in I \Rightarrow 0 = f(0) \in f(I)$

. $x \in f(I)$ و $y \leq x$ ⇐ يوجد $x_1 \in I$ بحيث يكون $x = f(x_1)$ ويوجد
$y_1 \in A$ بحيث يكون $y = f(y_1)$

$y = yx = f(y_1)f(x_1) = f(y_1 x_1) \in f(I)$

لأن $y \leq x$

ملاحظة لأن :

$y_1 x_1 \geq x_1$

و I مثالية و $x_1 \in I$

$\Rightarrow y_1, x_1 \in I$ $\Rightarrow$ $y \in f(I)$

نفرض أن $x \in f(I)$ و $y \in f(I)$ $\Leftarrow$ يوجد $x_1, y_1 \in I$ حيث يكون

$x = f(x_1)$ و $y = f(y_1)$

$x \vee y = f(x_1) \vee f(y_1) = f(x_1 \vee y_1) \in f(I)$

ومنه نستنتج أن $f(I)$ مثالية في B